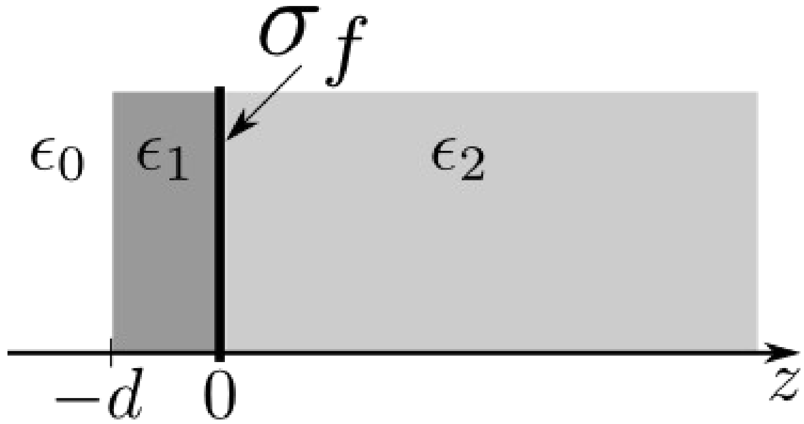
FK5019 - Elektromagnetism och vågor, Fysikum, Stockholms Universitet
Tentamensskrivning, måndag 13 mars 2017, kl 8:00 - 13:00

Läs noggrant igenom hela tentan först.
Tentan består av 4 olika uppgifter med deluppgifter (a), (b), (c), (d) ... som vardera är värda ett visst givet antal poäng (1p), (2p), (3p) eller (4p). Totalt antal poäng är (28p).
Börja med uppgifterna du tror att du klarar bäst och förklara tydligt ditt resonemang!
Notera att vissa uppgifter har användbara tips längst ner på respektive sida.
Tillåtna hjälpmedel: Kopia av formelsamling från kursboken.

Lycka till!
Marcus Dahlström

1. *I denna uppgift ska du undersöka avskärmning av en laddad yta i en dielektrisk struktur.*

Ett stort stycke dielektrisk material med permittivitet ϵ_2 är placerad i $z > 0$ med sin platta yta i $z = 0$. Ett *annat* dielektriskt material, med permittivitet ϵ_1, har placerats på utsidan, som ett ytskikt med tjocklek d, enligt figuren. Mellan dessa två material har en *fri* ytladdningsdensitet, $\sigma_f > 0$, spärrats in vid $z = 0$. Utanför materialen, $z < -d$, råder vakuum, $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. De dielektriska materialen och ytladdningen kan antas ha oändlig utsträckning i xy-planet.



(a) (2p) Utgå från differentialformen av Gauss lag i material, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$, och härled dess integralform. Motivera sedan val av *volym* givet symmetrin i problemet för att bestämma det elektriska förskjutningsfältet, $\mathbf{D}$, i alla *tre* områden: $z < -d$, $-d < z < 0$ och $0 < z$. Var noga med att ange $\mathbf{D}$-fältets riktning med vektornotation.

(b) (2p) Bestäm det elektriska fältet $\mathbf{E}$ i alla *tre* områden.

(c) (2p) Bestäm den *totala* ytladdningsdensiteten, σ, mellan materialen vid $z = 0$.

Tips:
Du kan verifiera att $\sigma < \sigma_f$ som du förväntar dig på grund av *avskärmningseffekten*.

2. *I denna uppgift ska du undersöka interaktionen mellan två magnetiska dipoler.*

(a) (1p) Redogör kortfattat för vad som menas med en *fysikalisk* magnetisk dipol: Hur stort är dess dipolmoment och hur är det riktat? Rita en schematisk bild.

(b) (1p) Givet att vektorpotentialen från en *ideal* magnetisk dipol $\mathbf{m}$ i origo är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

visa att vektorpotentialen från en dipol linjerad längs $\hat{\mathbf{z}}$, med moment $\mathbf{m}_1 = m_1 \hat{\mathbf{z}}$, kan uttryckas i *sfäriska* koordinater (r, θ, ϕ) som

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}.$$

(c) (2p) Beräkna det magnetiska fältet $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ från den linjerade dipolen $\mathbf{m}_1 = m_1 \hat{\mathbf{z}}$. Rita en schematisk bild av *fältlinjerna*.

(d) (2p) En *andra* magnetisk dipol, $\mathbf{m}_2$, placeras nu på ett avstånd L i punkten $\mathbf{r}' = L\hat{\mathbf{x}}$. Antag att riktningen för $\mathbf{m}_1 = m_1 \hat{\mathbf{z}}$ är fixerad, men att $\mathbf{m}_2$ kan att vrida sig. Hur riktar sig $\mathbf{m}_2$ och hur stor är den *minimala energin* som den andra dipolen kan finna? Uttryck ditt svar i μ_0, m_1, m_2 och L.

Tips:

Energin för en magnetisk dipol i ett magnetiskt fält är:

$$U_{\text{dip}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}.$$

3. *I denna uppgift ska du beräkna den inducerade laddningen på en metallklot i ett elektriskt fält.*

(a) (3p) Redogör kortfattat för en *perfekt ledares* egenskaper: Vad är V, $\mathbf{E}$ och ρ i och på dess yta?

(b) (1p) Ett konstant elektriskt fält riktat längs $\hat{\mathbf{z}}$ ges av $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0\hat{\mathbf{z}}$. Beräkna den elektriska potentialen, $V_0(\mathbf{r})$, med referenspunkten i origo, $O = (0, 0, 0)$. Uttryck ditt svar i *sfäriska* koordinater (r, θ, ϕ).

(c) (4p) Ett neutralt klot med radie R tillverkad av ett *perfekt ledande* material placeras nu i origo i det externa fältet från deluppgift (b). Utnyttja *bildladdningsmetoden* för att beräkna den totala potentialen, $V(\mathbf{r})$, i området *utanför* klotet, $r > R$.

(d) (2p) Beräkna den *inducerade* ytladdningen på klotet i det externa fältet från deluppgift (c).

Tips:
En elektrisk monopol q i origo har potentialen:

$$V_{\mathrm{mon}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

En elektrisk dipol $\mathbf{p}$ i origo har potentialen:

$$V_{\mathrm{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Ytladdningstätheten på en perfekt ledare ges av:

$$\sigma = -\epsilon_0\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla V,$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen riktad *ut* från ledaren.

4. *I denna uppgift ska du undersöka det elektromagnetiska fältet i en spole med ökande ström.*

(a) (3p) Betrakta en spole med radie R och *n* varv per längdenhet som är riktad längs $\hat{\mathbf{z}}$. Genom tråden i spolen flyter en ström som *ökar linjärt* med tiden, $I(t) = I_0 t$. Beräkna det magnetiska fältet i spolen. Du får anta att spolen är *oändligt* lång och att problemet är *kvasistatiskt.*

(b) (3p) Beräkna det inducerade elektriska fältet i spolen. Kommentera riktning *och* tidsberoende.

Tips:
Använd olika varianter av ”Ampère's loop”.