

a) Bestäm D -fältet. Beror bara på fri laddning.

$$\nabla \cdot D = \rho_f$$

Integralform med divergensteoremet:

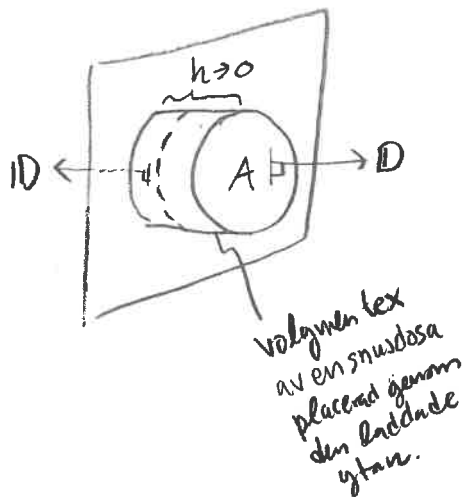
$$\oint da \cdot D = \int d\tau \rho_f$$

D -fältet måste vara symmetriskt $D(z) = -D(-z)$

och peka längs \hat{z} : $D(z) = D(z)\hat{z}$.

$$2AD(z) = A\sigma_f \quad , \quad z > 0$$

$$D(z) = \begin{cases} \sigma_f/2 \hat{z} & , \quad z > 0 \\ -\sigma_f/2 \hat{z} & , \quad z < 0 \end{cases} \quad (\text{i alla områden})$$



(2)

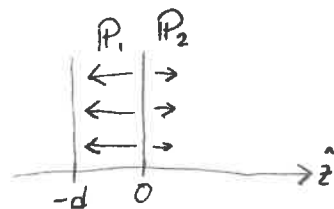
b) Bestäm E -fältet i alla områden: Materialet är linjärt: $D = \epsilon E$

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma_f}{2\epsilon_2} \hat{z} & , \quad z > 0 \\ -\frac{\sigma_f}{2\epsilon_1} \hat{z} & , \quad 0 > z > -d \\ -\frac{\sigma_f}{2\epsilon_0} \hat{z} & , \quad -d > z \end{cases}$$

(2)

c) Polarisationen i de dielektriska materialen: $D = \epsilon_0 E + P$ (ϵ_1 och $\epsilon_2 > \epsilon_0$)

$$P = D - \epsilon_0 E = \begin{cases} \hat{z} \frac{\sigma_f}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2}\right) & , \quad z > 0 \\ -\hat{z} \frac{\sigma_f}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\right) & , \quad 0 > z > -d \end{cases}$$



Polarisationen är riktad ut från den laddade ytan. Den är störst i ϵ_1 -området.

1.iii) c.iii) Bunden laddning: $\sigma_b = P \cdot \hat{n}$ ^{normal ut ur materialet}

$$\sigma_{b_1} = P_1 \cdot \hat{n}_1 = - \frac{\sigma_f}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right)$$

↑
motriktade

$$\sigma_{b_2} = P_2 \cdot \hat{n}_2 = - \frac{\sigma_f}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$$

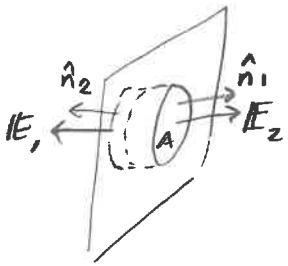
$$\sigma_b = \sigma_{b_1} + \sigma_{b_2}$$

Total ytladdning:

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_b = \sigma_f \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$$

$$= \sigma_f \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) \quad \square$$

Alternativ och smartare lösning: Använd Gauss lag för \mathbf{E} (känd från b) som beror på den totala laddningen.



$$E_1 A + E_2 A = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{A \sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_f}{2\epsilon_1} + \frac{\sigma_f}{2\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \sigma_f \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) \quad \square$$

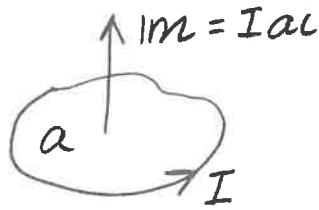
Eftersom $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ är $\sigma < \sigma_f$.

1 linjär material gäller

(1)

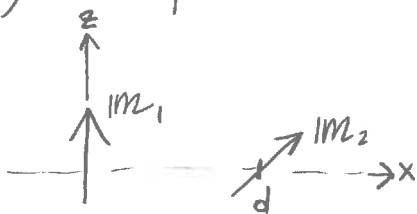
16

2) a) En fysikalisk magnetisk dipol består av en ledande slinga med ström I och area (vektor area) a . Det magnetiska dipolmomentet är då $\mathbf{m} = I a$ (riktat i normalens riktning från arean). Tex:



(1)

b) Vektor potential från magnetisk dipol: $A_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$



$\mathbf{m}_1 = m_1 \hat{\mathbf{z}}$: Uttryck i sfäriska koordinater.

$$A_{dip,1}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{(\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\theta}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$= -\frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \underbrace{\hat{\theta} \times \hat{\mathbf{r}}}_{-\hat{\phi}} = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$

endast ϕ -komponent.

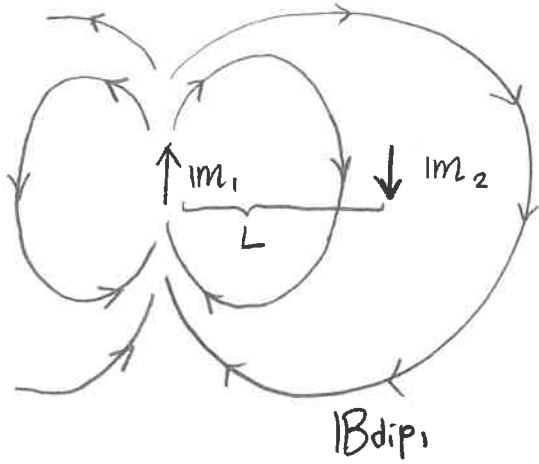
(2)

$$c) \mathbf{B}_{dip,1}(\mathbf{r}) = \nabla \times A_{dip,1} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \left\{ \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \right\} - 0) \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[0 - \frac{\partial}{\partial r} (r \left\{ \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \right\}) \right] \hat{\theta} + 0 \hat{\phi}$$

$$= \frac{1}{r \sin\theta} \left[2 \sin\theta \cos\theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[+ \frac{1}{r^2} \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \sin\theta \right] \hat{\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\theta} \right]$$

2.11) d) Om m_2 är fri att rotera kommer den ställa sig längs $B_{dip_1}(\hat{x})$.



Den kommer alltså peka åt motsatt håll mot m_1 , (riktning neråt: $-\hat{z}$).

Energin i dipolen ($U_{dip} = -m \cdot B$) minimeras:

$$U_{dip} = -m_2 \cdot B_{dip_1} = -m_2 B_{dip_1}$$

$$= -\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi L^3}$$

(3) 3) a) En perfekt ledare har ett oändligt antal fria laddningar som kan flytta på sig fritt i hela materialet. [8]

(i) $\mathbf{E} = 0$ i ledaren annars skulle en kraft verka på laddningarna och de skulle flytta sig till en ny fördelning.

(ii) $\rho = 0$ i ledaren ty Gausslag $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 = 0$

(iii) Om någon laddning finns i ledaren finns den på ytan som ytladdning σ . ✓

(iv) Ledare är ekvipotential ty $V = - \int d\ell \cdot \mathbf{E} = 0$. ✓

(v) Det elektriska fältet på ytan av ledaren pekar i normalens riktning. Den parallella komponenten hade annars flyttat på ytladdningen till en ny fördelning. ✓

(1)

b) En perfekt ledande sfär i ett konstant elektriskt fält: $\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{z}}$.

Potential från externt fält: $V_0(\mathbf{r}) = - \int_{\sigma} d\ell' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') =$

(Fundamentala teoremet för gradient)

$$= - \int_{\sigma} d\ell' \cdot \hat{\mathbf{z}} E_0 = - \int_0^z dz' E_0 = - z E_0$$

$$\leftarrow (\text{välj } \sigma = 0) = - r \cos \theta E_0$$

(4)

c) Bildladdningsmetoden:

Ersätt det ledande materialet med en laddningsfördelning som uppfyller att ledaren är en ekvipotential (och att beteendet på stort avstånd är OK).

Elektriskt dipol potential: Placeras i mitten av sfären $\mathbf{p} = p_0 \hat{\mathbf{z}}$.

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \cos \theta}{r^2} \quad \checkmark$$

3.iii) c) Vi vill ha en ekvipotential för $r=R$ som är 0.



$V(R) = \text{konstant} = 0$

$$V_0|_{r=R} + V_{\text{dip}}|_{r=R} = 0 \quad \checkmark$$

$$-R \cos \theta E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \cos \theta}{R^2} = 0$$

$$p_0 = \epsilon_0 4\pi R^3 E_0 \quad \checkmark$$

Den totala potentialen för $r > R$ blir:

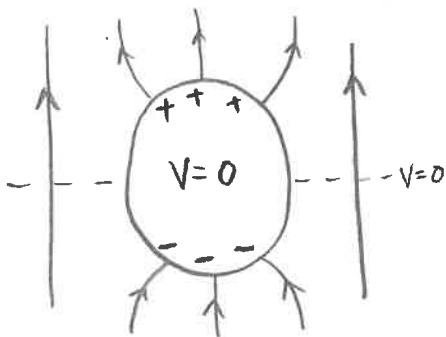
$$V(r) = -r \cos \theta E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0 \cos \theta}{r^2}$$

$$= -r \cos \theta E_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \epsilon_0 4\pi R^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$= \left(-r + \frac{R^3}{r^2}\right) \cos \theta E_0 \quad \checkmark$$

d) ytladdningen: $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$ för sfär $\hat{n} = \hat{r}$

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\epsilon_0 \left(-1 + \frac{R^3}{r^3} (-2)\right) \Big|_{r=R} \cos \theta E_0 = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$



4) Strömmen på ytan av en spole ges av $I_K(t) = K_0 t \hat{\phi}$ för $s = R$.
 (Den ökar linjärt i tiden men quasistatiskt så att $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$.)

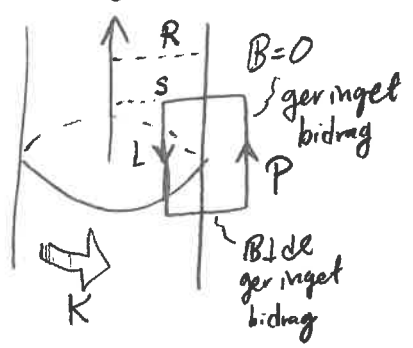
(3)
 a) Bestäm det magnetiska fältet i spolen givet att $B(r) = \begin{cases} B(s) \hat{z} & , s < R \\ 0 & , s > R \end{cases}$

Ampères lag: ≈ 0 : Kvasistatiskt

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \approx \mu_0 J$$

Fundamentala teoremet för rotationer: \rightarrow Ampères loop: $n I_0$

$$\oint dl \cdot B = \int da \cdot \mu_0 J \rightarrow -L B(s) = -\mu_0 K_0 t L$$



B och dl motriktade

strömmen flyter i motsatt håll mot normalen på ytan enligt kurvan i bilden.

$$B = \mu_0 K_0 t \hat{z} , s < R$$

beror ej på s i spolen.

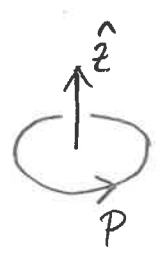
(3)
 b) Bestäm det elektriska fältet: Vi vet att det ska vara konstant!

Faradays lag:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 K_0 \hat{z} \text{ (ja, det blir konstant)}$$

"Ampères loop" för E-fältet: ($s < R$)

$$\oint dl \cdot E = \int da \cdot (-\frac{\partial B}{\partial t}) = \int da \cdot \hat{z} (-\mu_0 K_0)$$



Antag: $E(r) = E(s) \hat{\phi} , s < R$ (analyserad B längs linjeström)

$$\rightarrow 2\pi s E(s) = \pi s^2 (-\mu_0 K_0)$$

$$E(s) = -\frac{\mu_0 K_0 s}{2}$$

$$E(r) = -\frac{\mu_0 K_0 s \hat{\phi}}{2} \text{ (s < R)}$$