FK5019 - Elektromagnetism och vågor, Fysikum, Stockholms Universitet
Tentamensskrivning, måndag 21 mars 2016, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant igenom hela tentan först.
Tentan består av 5 olika uppgifter med deluppgifter (a), (b), (c), (d) ... som vardera är värda ett visst givet antal poäng (1p), (2p) eller (3p). Totalt antal poäng är (29p).
Börja med uppgifterna du tror att du klarar bäst och förklara tydligt ditt resonemang!
Notera att vissa uppgifter har användbara tips längst ner på respektive sida.
Tillåtna hjälpmedel: Kopia av formelsamling från kursboken.

Lycka till!
Marcus Dahlström

1. *I denna uppgift ska du att beräkna fälten i en kondensator och sist bestämma dess kapacitans.*

(a) (2p) Betrakta en tunn metallplatta i vakuum. Ytan är orienterad i xy-planet och placerad i $z = 0$ med en jämt fördelad fri positiv ytladdningstäthet $\sigma_f > 0$. Utgå sedan från Gauss lag på differentialform och härled integralformen av Gauss lag. Välj en lämplig volym och beräkna det elektriska fältet $\mathbf{E}(z)$. Du får anta att plattan är oändligt stor. Var noga med att beskriva fältet på *båda* sidor om plattan.

(b) (1p) En andra metallplatta placeras i $z = a$ med en jämt fördelad fri negativ ytladdningstäthet $-\sigma_f$ för att skapa en kondensator. Använd *superpositionsprincipen* för att bestämma det totala elektriska fältet $\mathbf{E}(z)$ i områdena utanför, $z < 0$ och $z > a$, och inuti kondensatorn, $0 < z < a$.

(c) (2p) Området mellan plattorna fylls nu med ett linjärt dielektriskt material med permittivitet $\epsilon > \epsilon_0$. Beräkna förskjutningsfältet $\mathbf{D}(z)$, polarisationen $\mathbf{P}(z)$ och det elektriska fältet $\mathbf{E}(z)$ inuti kondensatorn.

(d) (1p) Beräkna den bundna ytladdningstätheten $\sigma_b = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen riktad ut från det dielektriska materialet, och förklara med en bild *varför* och *hur* det elektriska fältet i kondensatorn har ändrats på grund av det dielektriska materialet.

(e) (1p) Vi antar nu att plattorna är begränsade med en area A och att avståndet mellan plattorna, a, är så litet att fälten på kanterna av plattorna kan försummas. Kapacitansen för en kondensator ges av $C = Q/V$, där Q är den totala fria laddningen på den positiva ytan och V är den elektriska potentialen mellan plattorna. Beräkna C för kondensatorn uttryckt i A, a och ϵ.

2. *I denna uppgift ska du beräkna hur en atom polariseras av ett omgivande elektrisk fält.*

(a) (2p) Betrakta en homogent laddad sfär med radie R_e och en negativ laddningsdensitet $\rho_e < 0$. Utgå från Gauss lag på differentialform och härled integralformen av Gauss lag. Välj en lämplig volym och visa att det elektriska fältet inuti sfären är $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}\mathbf{r}$, där $|\mathbf{r}| < R_e$.

(b) (2p) En enkel modell av en neutral atom består av en negativt laddad elektronsfär och en positiv laddad kärna som kan approximeras som en punktladdning $Q_k = -Q_e$, där $Q_e = \rho_e 4\pi R_e^3/3$ är den totala laddningen för den homogena elektronsfären från deluppgift (a). Atomen placeras nu i ett elektriskt fält riktat längs z-axeln, $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = E_0\hat{\mathbf{z}}$. Hur stort blir avståndet d mellan kärnan och elektronsfärens centrum vid jämvikt? Du får anta att elektronmolnet förblir uniformt och sfäriskt! Beräkna sedan det atomära dipolmomentet $\mathbf{p} = Q_k\mathbf{d}$, uttryckt i R_e, ϵ_0 och $\mathbf{E_0}$.

(c) (2p) Antag nu att det externa fältet $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ genereras av en punktladdning q placerad i $\mathbf{r}' = -a\hat{\mathbf{z}}$ som ligger på ett stort avstånd, $a \gg R_e$, från atomen. Beräkna kraften $\mathbf{F}$ mellan atomen och den extra punktladdningen uttryckt i R_e, a, q och ϵ_0. Hur är kraften riktad?

Tips:
Det elektriska fältet från en punktladdning q placerad i origo är:
$\mathbf{E}_{\mathrm{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$.
Det elektriska fältet från dipol $\mathbf{p}$ placerad i origo och riktad längs z-axeln är:
$\mathbf{E}_{\mathrm{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\theta})$.

3. *I denna uppgift ska du beräkna hur en metallyta påverkas av en yttre punktladdning.*

Betrakta en metall (perfekt ledare) och utsträcker sig i halva rummet, $z > 0$. Metallens yta ligger i xy-planet för $z = 0$ med normalen $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$. Utanför metallytan placeras en positiv punktladdning $q > 0$ i $\mathbf{r}' = -a\hat{\mathbf{z}}$.

(a) (1p) Rita en bild med elektriska fältlinjer från punktladdningen och var noga med att rita hur fältlinjerna ser ut vid metallytan och inuti metallen. Tänk på att avståndet mellan fältlinjer och deras riktning är betydelsefull.

(b) (1p) Förklara kort hur detta problem kan lösas med *bildladdningsmetoden*. Rita en bild av det nya systemet som uppfyller randvillkoret för den perfekta ledaren. Visa sedan explicit att den elektriska potentialen på metallytan är konstant.

(c) (3p) Vad är det som egentligen händer på metallens yta? Beräkna ytladdningstätheten $\sigma(s)$ på metallytan som funktion av den polära avståndet på ytan, $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Beräkna sedan den *totala* ytladdningen Q. Uttryck dina svar i q, a och s. Repelleras eller attraheras den yttre punktladdningen av metallytan?

Tips:
Den elektrostatiska potentialen från en punktladdning q i $\mathbf{r}'$ är:
$V(\mathbf{r}) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, där avståndet är $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.
Ytladdningstätheten på en metallyta ges av:
$\sigma = -\epsilon_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla V$.

4. *I denna uppgift ska du gå igenom principen för hur en elgitarr fungerar.*

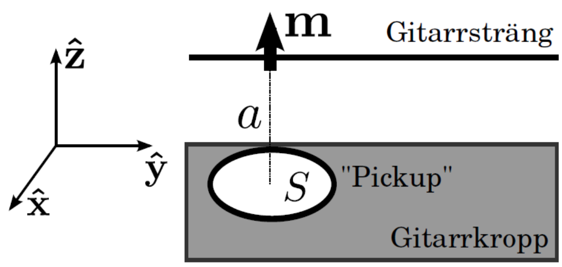
En magnetisk dipol, $\mathbf{m}$, är riktad längs z-axeln. Under dipolen på ett avstånd, a, finns en ledande slinga med area S i xy-planet. I gitarranalogin är den magnetiska dipolen en bit av gitarrsträngen som har magnetiserats och slingan är en spole som sitter i gitarrens pickup (se bild nedan). Du ska visa att spolen kan känna av strängens rörelse och omvandla denna till elektrisk signal.

(a) (1p) Givet vektorpotentialen för den magnetiska dipolen, $\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{\sin\theta}{r^2}\hat{\phi}$, beräkna explicit det magnetiska fältet, $\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r})$, i sfäriska koordinater.

(b) (1p) Härled Faradays lag på integralform från differential formen. Definiera det magnetiska flödet, Φ, genom en sluten slinga och visa hur detta är relaterat till den så-kallade elektromotoriska kraften, ε_{EMF}.

(c) (2p) Antag att centrum av slingan är placerad i $\mathbf{r}' = -a\hat{\mathbf{z}}$ och att den är så liten att $\Phi \approx S B_{\text{dip}}(\mathbf{r}')$, där S är slingans area. Finn ett approximativt uttryck för Φ som funktion av en liten ändring i avståndet mellan dipol och slinga, alltså, för $a = a_0 + \Delta a$, där $a_0 \gg \Delta a$ (genom att utföra en Taylor utveckling till första ordningen i Δa).

(d) (1p) Nu slår vi an ”gitarrsträngen” så att avståndet mellan dipol (strängen) och slingan (pickup) vibrerar enligt $a(t) = a_0 + b_0 \sin\omega t$, där ω är vinkelfrekvensen för gitarrtonen och b_0 är amplituden för svängningen. Beräkna den elektromotoriska kraften $\varepsilon_{\text{EMF}}(t)$ i pickup uttryckt i $a_0, b_0, S, m, \omega, t$ och μ_0.



Tips:
Första ordningens Taylor-utveckling ges av:
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0} \Delta x.$

5. *I denna uppgift ska du beräkna hur en elektromagnetisk våg reflekteras mot en metallyta.*

En elektromagnetisk planvåg propagerar i vakuum längs z-axeln i positiv riktning. Vågen är polariserad i x-riktningen med en reell amplitud E_I. Den har vågtal $k = 2\pi/\lambda$ och vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$, där λ är våglängden och T är periodtiden för svängningen. I området $z > 0$ finns en metall som är en perfekt ledare.

(a) (2p) Förklara kort varför *inte* vågen kan fortsätta in i denna metall. Gör sedan en ansats (använd komplex notation) för den inkommande vågen $\tilde{\mathbf{E}}_I(z,t)$ och för den reflekterade vågen $\tilde{\mathbf{E}}_R(z,t)$, uttryckt i E_I, k, z, ω och t. Hur stort är det fysikaliska elektriska fältet precis på metallytan?

(b) (2p) Beräkna energidensiteten $u_E(z,t)$ för det *elektriska* fältet i vakuum-området, $z < 0$. Uttryck ditt svar med $\sin$ och $\cos$-funktioner.

(c) (2p) Beräkna nu det *magnetiska* fältet i vakuum-området, $z < 0$, och bestäm den magnetiska energidensiteten $u_B(z,t)$. Uttryck ditt svar med $\sin$ och $\cos$-funktioner med $\epsilon_0, E_I, k, z, \omega$ och t. Beskriv kort med ord hur energin fördelas mellan E-fält och B-fält i tid och rum.

Tips:
Om den elektriska delen av en planvåg (i komplex notation) i ges av:
$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$,
så ges den magnetiska delen av:
$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$,
där $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ är ljusets hastighet i vakuum.