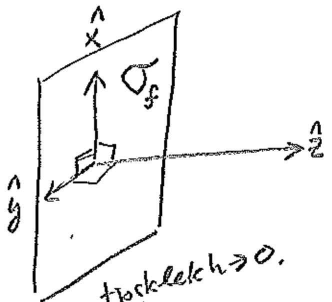
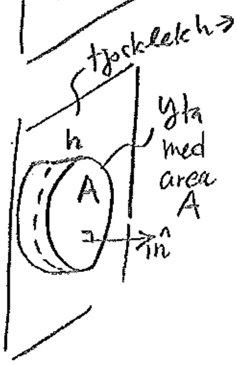
Tentamenskrivning FK5019 Elektromagnetism & vågor

21 mars 2016 Marcus Dahlström

1 a)





Gauss lag: $\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho_f/\varepsilon_0$

Total innesluten laddning

Volym integral: $\int d\tau\, \nabla \cdot \mathbb{E} = \int d\tau\, \rho_f/\varepsilon_0 = Q_{enc}/\varepsilon_0$

$= A\,\sigma_f/\varepsilon_0$

Divergens teoremet: $\oint d\mathbf{a} \cdot \mathbb{E} = A\,\sigma_f/\varepsilon_0$

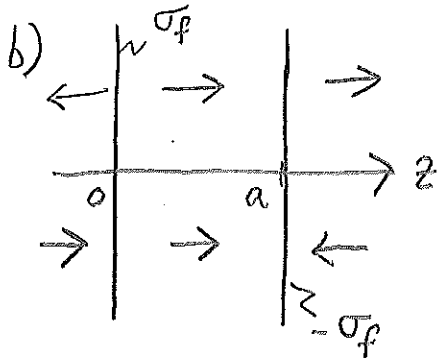
Två lock!

$\mathbb{E}$ pekar ut från ytan längs $\hat{n}$: $2A\,E(z) = A\,\sigma_f/\varepsilon_0$

$$E = \sigma_f/2\varepsilon_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E} &= +\sigma_f/2\varepsilon_0\,\hat{z}, \quad z>0 \\ \mathbb{E} &= -\sigma_f/2\varepsilon_0\,\hat{z}, \quad z<0 \end{aligned}}$$ (2p)

b)



Superposition av E-fält:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E} &= \left(-\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} = 0, \quad z<0 \\ \mathbb{E} &= \left(\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}\hat{z}, \quad 0<z<a \\ \mathbb{E} &= \left(\frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_f}{2\varepsilon_0}\right)\hat{z} = 0, \quad z>a \end{aligned}}$$ (1p)

D-fält beräknas med ρ_f: Liknande steg som i a) & b) : (med superpositions principen)

1 c) $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho_f \longrightarrow \boxed{\mathbb{D} = \sigma_f \hat{z}, \quad 0<z<a}$

Obs: E-fältet är nu inte samma som i b)!

$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E} \rightarrow \boxed{\mathbb{E} = \mathbb{D}/\varepsilon = \sigma_f/\varepsilon \, \hat{z}, \quad 0<z<a}$

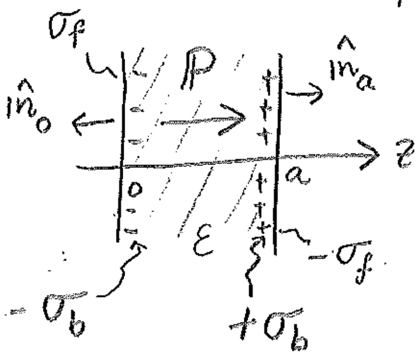
Polarisationen:

$$\mathbb{P} = \mathbb{D} - \varepsilon_0 \mathbb{E} = \mathbb{D} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\mathbb{D} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon)\sigma_f \hat{z}$$

$$\boxed{\mathbb{P} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon)\sigma_f \hat{z}}$$

d) Vi har: $0 < (1 - \varepsilon_0/\varepsilon) < 1$, eftersom $\varepsilon > \varepsilon_0$.

Polarisationen pekar i positiv $\hat{z}$-riktning.



Bunden laddning:

$$\sigma_b = \hat{n} \cdot \mathbb{P} = (1 - \varepsilon_0/\varepsilon)\sigma_f$$

(Vi ser att om $\varepsilon \to \varepsilon_0$ går $\sigma_b \to 0$.)

Den bundna laddning har motsatt tecken mot den fria laddningen på kondensator plattorna. Detta leder till en avskärmning av det elektriska fältet i kondenstorn.

Vakuum: $\mathbb{E} = \sigma_f/\varepsilon_0 \, \hat{z}$

Dielektriskt: $\mathbb{E} = \sigma_f/\varepsilon \, \hat{z}$, förändringsfaktor $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} < 1$.

1 e) Elektrisk potential : Härledning från formelsamling:

$$\mathbb{E}(\mathbb{r}) = -\nabla V(\mathbb{r}) \rightarrow \int_{\mathcal{O}}^{\mathbb{r}} d\mathbb{l} \cdot \mathbb{E} = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbb{r}} d\mathbb{l} \cdot \nabla V$$

↳ referenspunkt

$$= -V(\mathbb{r}) + V(\mathcal{O})$$

↖ Referenspunkt = Negativ platta. ($z=a$)

Potential mellan plattor:
(från negativ till positiv)

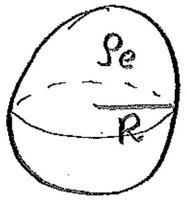
$$V(a) = -\int_{a\,(-)}^{0\,(+)} dz\, E = +aE = +a\sigma_f/\varepsilon$$

$$Q = \underbrace{\sigma_f A}_{} \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \sigma_f A}{a \sigma_f} = \frac{\varepsilon A}{a}}$$

Laddning på positiv platta.

Kapacitans är definierat som ett positivt tal.

2 a) Visa att $\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\mathbb{r}$, $|\mathbb{r}| < R_e$



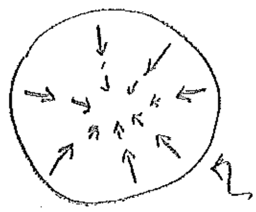
Gausslag:

$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho_e / \varepsilon_0$: Divergensteoremet ger:

Välj sfärisk yta och volym: $(r<R)$

$\int da \cdot \mathbb{E} = \int d\tau \, \rho_e/\varepsilon_0$: $\mathbb{E}$ är riktat radiellt: $\mathbb{E} = E(r)\hat{\mathbb{r}}$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$



$$E(r) = \frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0} \rightarrow$$

Vektorform:

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{r}) = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\mathbb{r}}$$

då $r < R$.

Elektriska fältet pekar in eftersom negativ laddning!

b) Kärnans punkt laddning $Q_k = -Q_e = -\rho_e 4\pi R_e^3/3$

Externt fält. $\mathbb{E}_0(\mathbb{r}) = E_0 \hat{z}$

Kraften som påverkar kärnan kommer från elektronerna $\mathbb{F}_e = Q_k \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\mathbb{r}$

och från det externa fältet $\mathbb{F}_E = Q_k E_0 \hat{z}$

Jämvikt: $(\mathbb{r} = \mathbb{d})$ $\quad \mathbb{F}_e + \mathbb{F}_E = 0$

$$\frac{Q_k \rho_e}{3\varepsilon_0}\mathbb{d} = -Q_k E_0 \hat{z} \rightarrow \boxed{\mathbb{d} = -\frac{3\varepsilon_0 E_0}{\rho_e}\hat{z}} \left(= + \frac{1}{Q_k} \cdot \frac{4\pi R_e^3}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\varepsilon_0 \mathbb{E}_0 \right)$$

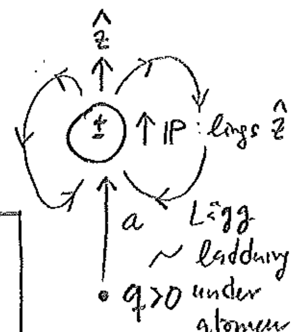
Dipolmoment:

$$\mathbb{P} = Q_k \mathbb{d} = + \frac{\cancel{\rho_e} 4\pi R_e^3}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}\varepsilon_0 E_0}{\cancel{\rho_e}}\hat{z} = 4\pi R_e^3 \varepsilon_0 \mathbb{E}_0$$

$$\boxed{\mathbb{P} = 4\pi R_e^3 \varepsilon_0 \mathbb{E}_0}$$

c) Styrkan på det externa fältet är nu: Inducerad dipol:

$$E_0 \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \rightarrow \mathbb{P} = 4\pi R_e^3 \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{R_e^3 q}{a^2}\hat{z}$$

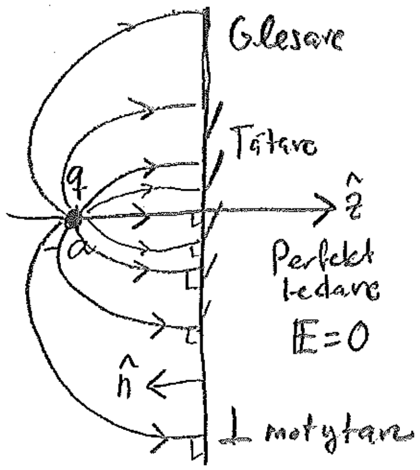


$$\mathbb{E}_{dip} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\Big(\underbrace{-2\hat{r}}_{+2\hat{z}}\Big) \rightarrow \boxed{\mathbb{F} = q\mathbb{E}_{dip} = + \frac{q^2 R_e^3}{2\pi\varepsilon_0 a^5}\hat{z}}$$

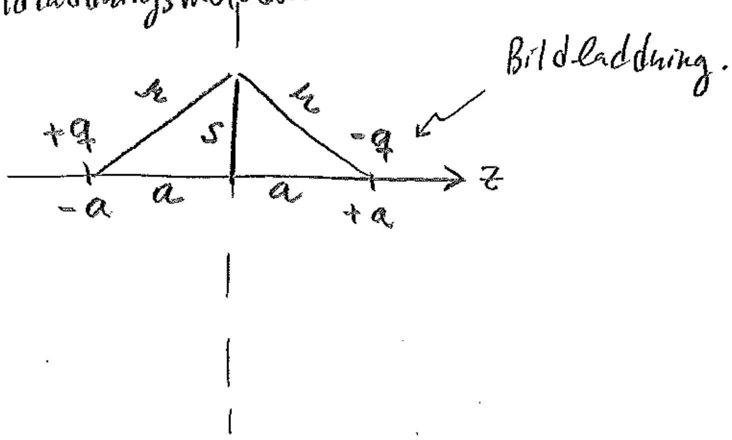
$\theta = \pi$

Alltid attraktiv kraft! (eftersom q^2)

3 a)



b) Bildladdningsmetoden:



$$V(x,y,z=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\underbrace{x^2+y^2}_{s^2}+(z+a)^2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(\underbrace{x^2+y^2}_{s^2}+(z-a)^2}}\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{s^2}+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{s^2}+a^2}}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

c) Ytladdningstätheten: $\sigma(s)$, $s=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\sigma = -\varepsilon_0 \underbrace{\hat{n}}_{-\hat{z}} \cdot \underbrace{\nabla V}_{\frac{\partial V}{\partial z}} = +\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+(z+a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2+(z-a)^2}}\right\}\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2(z+a)(-1/2)}{(s^2+(z+a)^2)^{3/2}} - \frac{2(z-a)(-1/2)}{(s^2+(z-a)^2)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2a}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

Ytladdning:

$$\boxed{\sigma(s) = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}}$$

är maximal precis framför punktladdningen (för $s=0$).

3 c) ... Total ytladdning:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; \sigma(s) = \overbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}^{2\pi} \int_0^{\infty} ds \; s \left(-\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}} \right) =$$

$$= -qa \int_0^{\infty} ds \frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}} = -qa \left[\frac{1 \; (-2/2)}{(s^2+a^2)^{1/2}} \right] \Bigg|_{s=0}^{s=\infty}$$

$$= +qa \left(\underbrace{\frac{1}{(\infty^2+a^2)^{1/2}}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{(0^2+a^2)^{1/2}}}_{1/a} \right) = -q$$

$$\boxed{\text{Den totala ytladdningen är } -q.}$$

Punktladdning attraheras mot ytan!

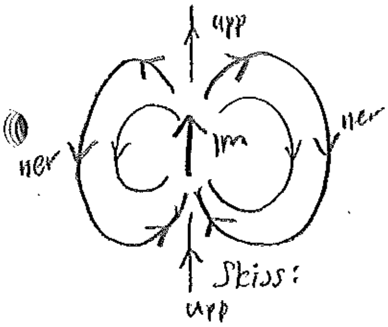
4 a)

$$\mathbb{A}_{dip}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}$$: Detta är Ψ_ϕ i formelsamling!

$$\mathbb{B}(\mathbb{r}) = \nabla \times \mathbb{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\sin^2\theta}{r^2} \right) \hat{\mathbb{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin\theta}{r} \right) \hat{\theta} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left(\frac{1}{r\cancel{\sin\theta}} \frac{2\cancel{\sin\theta}\cos\theta}{r^2} \hat{\mathbb{r}} + \frac{1}{r} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\theta} \right)$$

Skiss:



$$\boxed{\mathbb{B}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(2\cos\theta \, \hat{\mathbb{r}} + \sin\theta \, \hat{\theta} \right)}$$

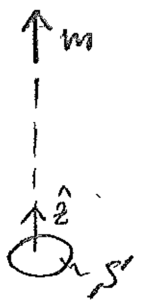
b) Faradays lag: $\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$

Integrera yta: $\int d\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbb{E} = -\int d\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{a} \cdot \mathbb{B} \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ Magnetiskt flöde

Rotationsteorem: $\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbb{E} \equiv \mathcal{E}_{EMF}$ Elektromotorisk kraft

$$\boxed{\mathcal{E}_{EMF} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

4 c)



$$\mathbb{B}_{dip}(\mathbf{r}') = \left\{ \begin{matrix} \theta = \pi \\ r = a \end{matrix} \right\} = \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3}\left(-2(-\hat{z}) + 0\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3}\,\hat{z} \quad \text{(riktat upp!)}$$

(se skiss)

$$\Phi \approx S' B_{dip} = \frac{S'\mu_0 m}{2\pi a^3} = \frac{S'\mu_0 m}{2\pi (a_0 + \delta a)^3}$$

Taylorutveckla

$$\approx \underbrace{\frac{S'\mu_0 m}{2\pi a_0^3}}_{\Phi(a_0)} \underbrace{- \frac{3 S'\mu_0 m}{2\pi a_0^4}\cdot \delta a}_{+\left.\frac{d\Phi}{da}\right|_{a_0}\delta a}$$

$$\boxed{\Phi(a + \delta a) \approx \frac{S'\mu_0 m}{2\pi a_0^3}\left(1 - \frac{3\,\delta a}{a_0}\right)}$$

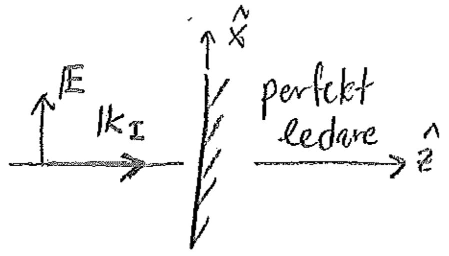
d) $a(t) = a_0 + b_0 \sin\omega t$, alltså $\delta a = b_0 \sin\omega t$ från c).

$$\mathcal{E}_{EMF}(t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{S\mu_0 m}{2\pi a_0^3}\left(0 - \frac{3}{a_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(b_0 \sin\omega t\right)\right)$$

$$= + \frac{S'\mu_0 m}{2\pi a_0^4}\, 3 b_0\, \omega \cos\omega t$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{EMF}(t) = \frac{3 S'\mu_0 m b_0}{2\pi a_0^4}\,\omega\cos\omega t}$$

5



a) En elektromagnetisk våg kan ej passera genom en perfekt ledare (som har konduktivitet $\sigma \to \infty$). Skindjupet är noll då $\sigma \to \infty$. I en perfekt ledare är $\mathbb{E} = 0$.

$$\tilde{\mathbb{E}}_I(z,t) = \hat{x}\, E_I\, e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbb{E}}_R(z,t) = -\hat{x}\, E_I\, e^{i(-kz-\omega t)}$$

Minustecken så att $\mathbb{E}(0,t) = \mathrm{Re}\{\tilde{\mathbb{E}}_I(0,t) + \tilde{\mathbb{E}}_R(0,t)\}$

inget $\mathbb{E}$-fält på ytan! $= \hat{x}\, E_I\,(1-1) = 0$ $\boxtimes$

b) Energidensiteten: (Beräknas med det fysikaliska fältet!)

$$u_E(z,t) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(z,t) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\mathrm{Re}\left\{E_I e^{i(kz-\omega t)} - E_I e^{i(-kz-\omega t)}\right\}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} E_I^2 \left(\mathrm{Re}\left\{\underbrace{\left(e^{ikz} - e^{-ikz}\right)}_{2i \sin kz}\underbrace{e^{-i\omega t}}_{(\cos\omega t - i\sin\omega t)}\right\}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} E_I^2 \left(2 \sin kz \sin\omega t\right)^2 = 2\varepsilon_0 E_I^2 \sin^2 kz \sin^2\omega t$$

$$\boxed{u_E(z,t) = 2\varepsilon_0 E_I^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t \,, \quad z<0}$$

är noll på ytan!
och för $kz = n\pi$: Kallas stående våg!

5 c)

$$\tilde{\mathbb{B}} = \frac{1}{c}\hat{\mathbb{k}} \times \tilde{\mathbb{E}}$$

Eftersom $\hat{k}_I = \hat{z}$ och $\mathbb{E}_I \sim \hat{x}$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{B}}_I(z,t) = \dfrac{E_I}{c}\hat{y}\, e^{i(kz-\omega t)} \\ \tilde{\mathbb{B}}_T(z,t) = + \dfrac{E_I}{c}\hat{y}\, e^{i(-kz-\omega t)} \end{cases}$$

Här blir plus eftersom $\hat{\mathbb{k}}_T = -\hat{z}$
och $E_{0T} = -E_{0I}$.

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(Re\left\{\tilde{\mathbb{B}}_I(z,t) + \tilde{\mathbb{B}}_T(z,t)\right\}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_I^2}{c^2}\left(Re\left\{\underbrace{\left(e^{ikz} + e^{-ikz}\right)}_{2\cos kz}\underbrace{e^{-i\omega t}}_{\cos\omega t - i\sin\omega t}\right\}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0\mu_0}{2\mu_0}E_I^2\left(2\cos kz\cos\omega t\right)^2$$

$$\boxed{u_B(z,t) = 2\varepsilon_0 E_I^2 \cos^2 kz \cos^2\omega t}$$

är maximal på ytan! (och vid $kz = n\pi$)

svinger med $\pi/2$ fasförskjutning jämfört med E-fältet!