FK5019 - Elektromagnetism och vågor, Fysikum, Stockholms Universitet
Tentamensskrivning, fredag 17 Juni 2016, kl 9:00 - 14:00

Läs noggrant igenom hela tentan först.
Tentan består av 4 olika uppgifter med deluppgifter (a), (b), (c), (d) ... som vardera är värda ett visst antal poäng (1p), (2p) eller (3p). Totalt antal poäng är (27p).
Börja med uppgifterna du tror att du klarar bäst och förklara tydligt ditt resonemang!
Notera att vissa uppgifter har användbara tips längst ner på respektive sida.
Tillåtna hjälpmedel: Kopia av formelsamling från kursboken.

Lycka till!
Marcus Dahlström

1. *I denna uppgift ska du undersöka det elektriska fältet från ett laddat klot i olika material.*

(a) (1p) Betrakta ett klot av metall i vakuum. Klotet har radie R och har laddats upp med en total *fri* laddning $q_f > 0$. Antag att metallen är en perfekt ledare och beskriv med ord hur den fria laddningen fördelar sig i klotet. Ange den fria ytladdningstätheten σ_f och den fria laddningsdensiteten ρ_f för klotet.

(b) (2p) Utgå från Gauss lag på differentialform och härled integralformen av Gauss lag. Välj en lämplig volym och beräkna det elektriska fältet $\mathbf{E}(r)$ utanför, $r > R$, och inuti metallklotet, $r < R$. Uttryck dina svar i r, q_f och ϵ_0.

(c) (3p) Området *utanför* metallklotet fylls nu med ett linjärt dielektriskt material med permittivitet $\epsilon > \epsilon_0$. Beräkna förskjutningsfältet $\mathbf{D}(r)$, det elektriska fältet $\mathbf{E}(r)$ och polarisationen $\mathbf{P}(r)$ utanför metallklotet. Uttryck dina svar i r, q_f och ϵ.

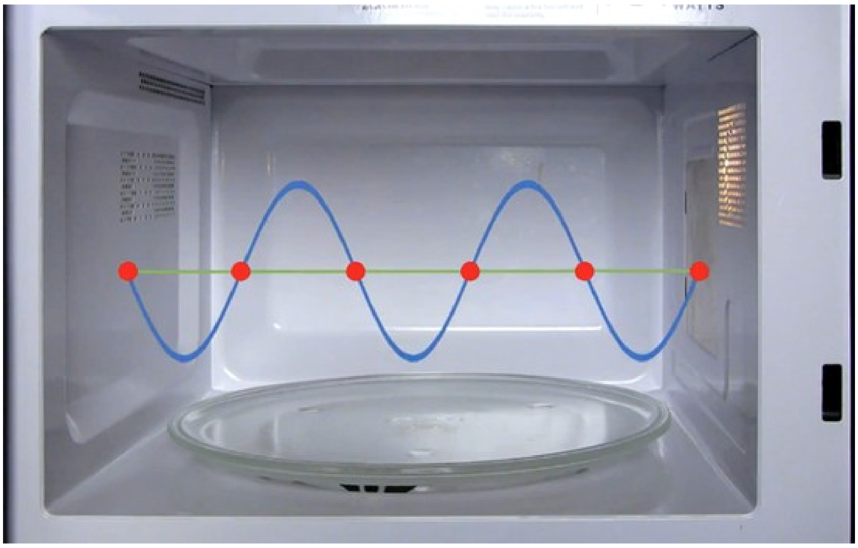
(d) (2p) Beräkna den *bundna* ytladdningstätheten $\sigma_b = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}$, där $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen riktad ut från det dielektriska materialet, och förklara med en enkel bild *varför* det elektriska fältet utanför klotet har ändrats på grund av det dielektriska materialet.

2. *I denna uppgift ska du undersöka stående elektromagnetiska vågor i en mikrovågsugn.*

En mikrovågsugn är en kammare där elektromagnetiska vågor från en magnetron används för matlagning. Vågorna har en våglängd på ungefär 12 cm och de reflekteras på ugnens insida för att skapa stående vågor. I denna uppgift antar vi att det elektriska fältet ges av följande stående våg:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \sin(kz)\cos(\omega t),$$

där $\mathbf{E}_0$ är en konstant vektor som beskriver polarisationen av fältet.



Bilden illustrerar hur det stående elektriska fältet $\mathbf{E}(z,t)$ kan se ut vid en given tid.

(a) (1p) Först, betrakta den stående vågen, $f(z,t) = \sin(kz)\cos(\omega t)$. Vilket förhållande mellan vinkelfrekvensen, ω, och och vågtalet, k, måste gälla för att $f(z,t)$ ska uppfylla vågekvationen:

$$\nabla^2 f = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \ ?$$

(b) (2p) Visa att den stående vågen $f(z,t)$ kan skrivas som en superposition av två propagerande vågor. Ange deras hastighet och riktning. Ge ditt svar med sinus-funktioner.

(c) (3p) Sist, antag att det elektriska fältet är polariserat i x-riktningen, $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{x}}$. Beräkna det tillhörande *stående* magnetiska fältet, $\mathbf{B}(z,t)$. Sammanfaller noderna för det stående magnetiska fältet med det stående elektriska fältet?

Eftersom upphettningen av maten endast kommer från det stående elektriska fältet så måste man rotera tallriken för att få en jämn och bra uppvärmning!

Tips:
Eulers formel, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, medför att
$\cos x = \frac{1}{2}[e^{ix} + e^{-ix}]$ och $\sin x = \frac{1}{2i}[e^{ix} - e^{-ix}]$
Förhållandet mellan vektorerna för elektromagnetiska planvågor i vakuum ges av:
$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$, där c är ljusets hastighet.

3. *I denna uppgift ska du undersöka magnetiska fält och vektorpotential från en ledande tråd.*

Betrakta en tråd i form av en cylinder med radie a som är orienterad längs $\hat{\mathbf{z}}$ ritningen. Genom tråden flyter ständigt en ström I i positiv z riktning. I detta problem använder vi cylindriska koordinater (s, ϕ, z) som definieras på formelbladet.

(a) (1p) Antag att strömmen är jämt fördelad i hela trådens volym och beräkna strömdensiteten $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Ge ditt svar med I och a.

(b) (2p) Använd Ampères lag på integralform,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a},$$

för att bestämma det magnetiska fältet $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ *inuti* tråden, $s < a$. Motivera hur symmetrin utnyttjas.

(c) (3p) Det magnetiska fältet $\mathbf{B}$ *utanför* tråden, $s > a$, ges av

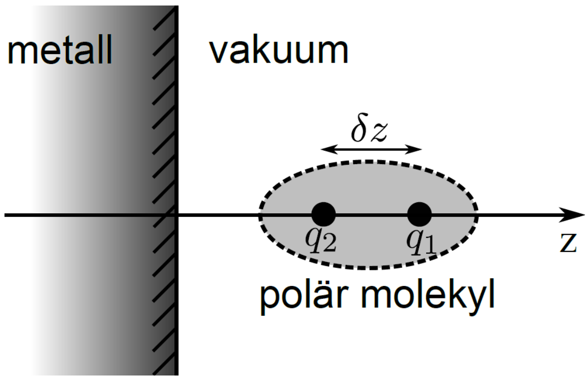
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}.$$

Din uppgift är nu att bestämma vektorpotentialen, $\mathbf{A}$, i området *utanför* tråden. För att förenkla uppgiften får du anta att vektorpotentialen är riktad längs z-axeln och att den bara beror av det radiella avståndet, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_z(s)\hat{\mathbf{z}}$.

Tips:
Relationen mellan det magnetiska fältet och vektorpotentialen är $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

4. *I denna uppgift ska du beräkna hur en polär molekyl påverkas av sin spegelbild i en metallyta.*

Betrakta en metall (perfekt ledare) och utsträcker sig i halva rummet, $z < 0$. Metallens yta ligger i xy-planet för $z = 0$ med normalen $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Utanför ytan placeras en ”polär molekyl” som vi approximerar som två punktladdningar: q_1 och q_2 med en separation δz.



Schematisk bild över den polära molekylen utanför metallytan.

(a) (2p) Den första punktladdningen är positiv $q_1 > 0$, och placerad i $\mathbf{r}_1 = z_1\hat{\mathbf{z}}$. Den andra punktladdningen är negativ $q_2 = -q_1$ och placerad i $\mathbf{r}_2 = z_2\hat{\mathbf{z}}$. Avståndet mellan laddningarna är $\delta z = z_1 - z_2 > 0$. Förklara kort hur detta problem kan lösas med *bildladdningsmetoden* och rita en bild av det nya systemet som uppfyller randvillkoren för metallytan.

(b) (2p) Skriv ner kraften $\mathbf{F}_1$ som metallen utför på punktladdning q_1. Skriv sedan ner motsvarande kraft $\mathbf{F}_2$ för q_2 laddningen. Tag alltså *inte* med repulsionskraften mellan de två punktladdningarna q_1 och q_2 då denna kompenseras av molekylära krafter! Ange dina svar med q_1, z_1, δz och ϵ_0.

(c) (3p) Den totala kraften från metallen som påverkar molekylen är $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Din uppgift är nu är att approximera $\mathbf{F}$ genom att utföra en Taylor utveckling till andra ordningen i $\delta z \ll z_1$. Visa att kraften mellan ytan och molekylen är mycket svag och avtar som $1/|z_1|^4$. Ange ditt svar med q_1, z_1, δz och ϵ_0.

Detta är ett exempel på en Van der Waals kraft som beskriver interaktionen mellan två dipoler!

Tips:

Den elektriska fältet från en punktladdning q i origo är:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$.

Taylor utveckling till andra ordningen ges av:

$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0} \delta x + \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} \delta x^2$.