

1) a) En metallsfär laddas upp med $q_f > 0$ (freladdning).

Eftersom metallen är en perfekt ledare kommer den fria laddningen att ligga sig på ytan av sfären.

Friyt-laddningsdensitet: $\sigma_f = \frac{q_f}{A_{\text{sfer}}} = \frac{q_f}{4\pi R^2} \quad (r=R)$

Fri laddningsdensitet: $\rho_f = 0$ i sfären ($r < R$)

b) Gauss lag på differential form:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \rightarrow \int d\tau \nabla \cdot \mathbf{E} = \int d\tau \rho / \epsilon_0$$

Divergensteorem Inslängd laddning

$$\rightarrow \int da \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} = Q_{\text{enc}} / \epsilon_0$$

Välj klotyta eftersom sfärisk symmetri ger att \mathbf{E} pekar åt $\hat{\mathbf{r}}$ // da .

$$\underbrace{4\pi r^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{area av klotyta}}} E(r) = Q_{\text{enc}} / \epsilon_0 = \begin{cases} 0, & r < R \\ q_f / \epsilon_0, & r > R \end{cases}$$

$$\rightarrow |\mathbf{E}(r)| = \begin{cases} \frac{q_f}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

c) Linjärt dielektriskt material, $\epsilon > \epsilon_0$.

Förskjutningsfält D beräknas direkt med q_f eftersom vi har sfärisk symmetri:

$$\nabla \cdot D = \rho_f \rightarrow D(r) = \frac{q_f}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad r > R$$

Elektriskt fält i linjärt dielektriskt material:

$$D = \epsilon E \rightarrow E = \frac{q_f}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}, \quad r > R$$

Polarisation:

$$D = \epsilon_0 E + P \rightarrow P = D - \epsilon_0 E = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{q_f}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad r > R$$

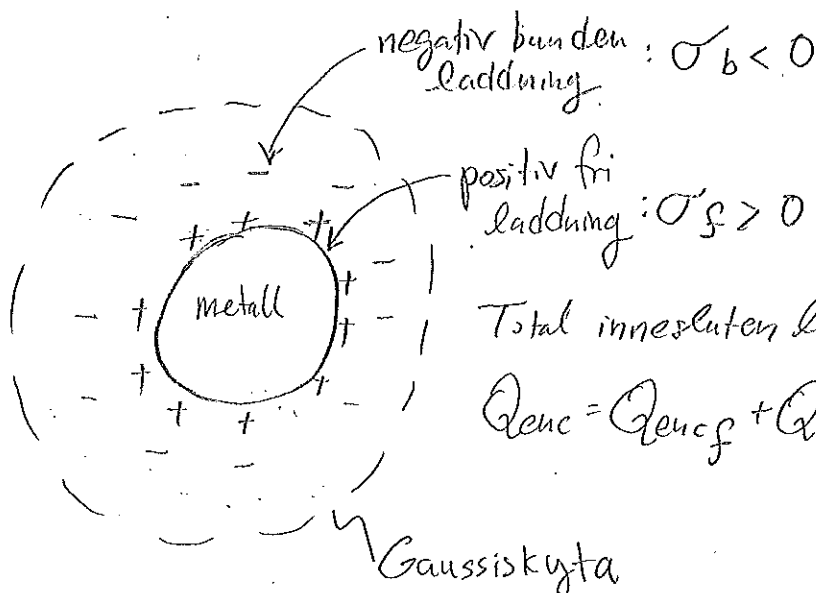
d) Bunden ytladdningsföret: $\sigma_b = \hat{n} \cdot P$ på ytan av sfären $\hat{n} = -\hat{r}$ normalen är riktad in mot centrum av sfären (ut från dielektriskt material)

$$\sigma_b = \hat{n} \cdot P = -\hat{r} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{q_f}{4\pi r^2} \hat{r} = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{q_f}{4\pi R^2}$$

Den bundna ytladdningen är negativ och skärmar av så att den totala laddningen kring sfären blir mindre.

Det gör att det elektriska fältet minskar i området

utan för sfären: Den bundna laddningen kommer från polarisationen av dielektriskt material som omger metall sfären.



Total innesluten laddning ($r > R$):

$$Q_{enc} = Q_{encf} + Q_{encb} = q_f - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) q_f = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} q_f$$

2) a) Stående våg: $f(z,t) = \sin(kz) \cos(\omega t)$

$$\nabla^2 f = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sin(kz) \cos(\omega t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sin(kz) \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow -k^2 \sin(kz) \cos(\omega t) = \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) \sin(kz) \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c : \text{ljusets hastighet.}$$

b) $f(z,t) = \sin(kz) \cos(\omega t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{2} (e^{ikz} - e^{-ikz}) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$

$$= \frac{1}{2i} \frac{1}{2} (\underline{e^{ikz+i\omega t}} + \underline{e^{ikz-i\omega t}} - \underline{e^{-ikz+i\omega t}} - \underline{e^{-ikz-i\omega t}})$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(kz+\omega t) + \sin(kz-\omega t))$$

Våg som propagerar
åt vänster
(negativ z rikt.)

Våg som propagerar åt
höger (positiv z rikt.)

Hastigheten ges av: $z = vt \equiv \frac{\omega}{k} t \rightarrow$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Alltså ljusets hastighet!

c) $E(z,t) = \frac{1}{2} E_0 \hat{x} (\sin(kz+\omega t) + \sin(kz-\omega t))$

Den första termen har $\hat{k} = -\hat{z}$, den andra har $\hat{k} = +\hat{z}$.

$$B(z,t) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} (-\hat{z} \times \hat{x} \sin(kz+\omega t) + \hat{z} \times \hat{x} \sin(kz-\omega t))$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} \hat{y} (-\sin(kz+\omega t) + \sin(kz-\omega t))$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} \hat{y} \frac{1}{2i} (-e^{ikz} e^{i\omega t} + e^{-ikz} e^{-i\omega t} + e^{ikz} e^{-i\omega t} - e^{-ikz} e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0}{c} \hat{y} \frac{1}{2i} (-e^{ikz} (\underbrace{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}_{2i \sin \omega t}) - e^{-ikz} (\underbrace{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}_{2i \sin \omega t}))$$

$$= -\frac{E_0}{c} \hat{y} \cos(kz) \sin(\omega t)$$

Har noder där E har bukar! Svänger i otakt!

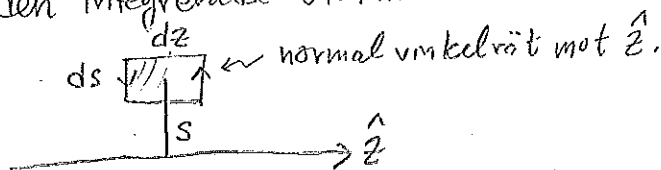
3) Cylinder med radie a med konstant ström I .

a) Strömdensiteten: $\mathcal{J} = \frac{I}{A} \hat{z} = \frac{I}{\pi a^2} \hat{z}$ \square
 [Enhet Ampere/meter²]

b) Ampères lag: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a}$

Det magnetiska fältet är riktat runt ledaren.

Det kan inte ha en komponent längs \hat{z} eller \hat{s} axel eftersom den integrerade strömmen är noll för:



magnetiska fältet kan vara konstant men för stort s måste magnetiska fältet vara noll alltså är det noll i både \hat{z} och \hat{s} riktningen.

Alltså: Det magnetiska fältet är riktat längs $\hat{\phi}$: $\mathbf{B}(r) = B_{\hat{\phi}}(s) \hat{\phi}$

Välj en cirkulär kurva med radie s .

$$\left\{ \begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} d\phi s B_{\hat{\phi}}(s) \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 2\pi s B_{\hat{\phi}}(s) \\ \mu_0 \int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} &= \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi s^2 = \mu_0 I \frac{s^2}{a^2}, \quad s < a. \end{aligned} \right.$$

$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2} \hat{\phi}, \quad s < a$: ökar linjärt med s .

$s > a$: $\left\{ \begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi s B_{\hat{\phi}}(s) \\ \mu_0 \int \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} &= \mu_0 I \end{aligned} \right. \rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$: avtar med s .

Hela strömmen innesluts!

3... c) Antag vektorpotential på formen:

$$A(\mathbf{r}) = A_z(s) \hat{z} \quad (\text{endast } \hat{z}\text{-komponent som endast beror på } s)$$

Cylinderkoordinater för rotationen (curl):

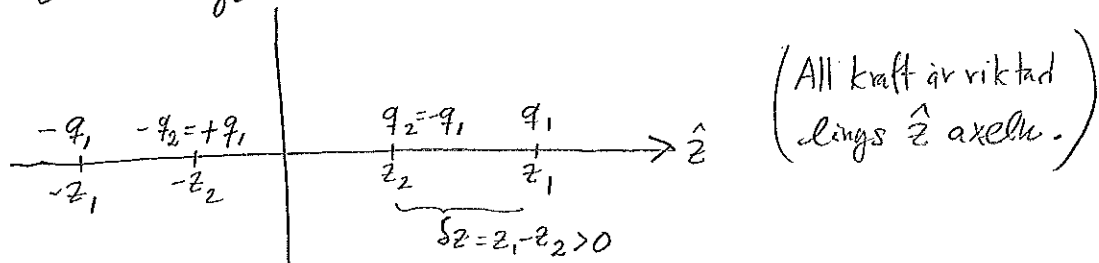
$$\nabla \times A = \frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \hat{s} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi}$$

$$\text{Ska vara lika med } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad \left(\begin{array}{l} \text{som ansatser antyder} \\ \text{måste alltså } \frac{\partial A_z}{\partial \phi} = 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial s} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \rightarrow A_z(s) = \int_a^s ds \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(s) \right] \Big|_a^s \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(s/a) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Referens} \\ \text{punkt.} \end{array}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(s/a) \hat{z} \quad \rightarrow \text{referenspunkten } a \text{ kan väljas fritt tex } a=1.$$

4) a) Bildladdningsmetoden: Ästakommer en konstant potential över metallytan.



b) Kraft från metall på q_1 : $+q_1$

$$F_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q_1}{(2z_1)^2} + \frac{-q_2}{(z_1+z_2)^2} \right) = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(2z_1)^2} + \frac{1}{(2z_1-\delta z)^2} \right)$$

Kraft från metall på q_2 :

$$F_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q_2}{(2z_2)^2} + \frac{-q_1}{(z_2+z_1)^2} \right) = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(2z_1-2\delta z)^2} + \frac{1}{(2z_1-\delta z)^2} \right)$$

c) Total kraft:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\overset{\text{I}}{-\frac{1}{(2z_1)^2}} + \overset{\text{II}}{\frac{1}{(2z_1-\delta z)^2}} - \overset{\text{III}}{\frac{1}{(2z_1-2\delta z)^2}} + \overset{\text{IV}}{\frac{1}{(2z_1-\delta z)^2}} \right)$$

Taylor utveckling: $f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}|_{x_0} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}|_{x_0} \delta x^2$

$$\text{I: } -\frac{1}{(2z_1)^2} = -\frac{1}{(2z_1)^2}$$

$$\text{II: } +\frac{1}{(2z_1-\delta z)^2} \approx \frac{1}{(2z_1)^2} + \frac{-2}{(2z_1)^3} (-\delta z) + \frac{-2 \cdot -3}{(2z_1)^4} \frac{1}{2} (-\delta z)^2$$

$$\text{III: } -\frac{1}{(2z_1-2\delta z)^2} \approx -\frac{1}{(2z_1)^2} - \frac{-2}{(2z_1)^3} (-2\delta z) - \frac{-2 \cdot -3}{(2z_1)^4} \frac{1}{2} (-2\delta z)^2$$

$$\text{IV: } +\frac{1}{(2z_1-\delta z)^2} \approx \frac{1}{(2z_1)^2} + \frac{-2}{(2z_1)^3} (-\delta z) + \frac{-2 \cdot -3}{(2z_1)^4} \frac{1}{2} (-\delta z)^2$$

4.iii) c) Bidrag som går som $1/z_1^2$ tar ut varandra:

$$-\frac{1}{(2z_1)^2} + \frac{1}{(2z_1)^2} - \frac{1}{(2z_1)^2} + \frac{1}{(2z_1)^2} = 0$$

Bidrag som går som $1/z_1^3$ tar ut varandra:

$$+\frac{2\delta z}{(2z_1)^3} - \frac{4\delta z}{(2z_1)^3} + \frac{2\delta z}{(2z_1)^3} = 0$$

Bidraget som går som $1/z_1^4$:

$$\frac{3(\delta z)^2}{(2z_1)^4} - \frac{3 \cdot 4 (\delta z)^2}{(2z_1)^4} + \frac{3(\delta z)^2}{(2z_1)^4} = -\frac{2 \cdot 3 (\delta z)^2}{(2z_1)^4} = -\frac{3 (\delta z)^2}{2^3 z_1^4}$$

Kraften är attraktiv (pekar mot metallytan) och går som $1/z_1^4$

$$\boxed{F = -\frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{8} \frac{(\delta z)^2}{z_1^4} \hat{z}}$$

Detta är kraften mellan två dipoler med moment $p = q_1 \delta z$.

En alternativ lösning kan byggas på dipol fältet:

$$E_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}) \rightarrow \frac{p}{4\pi\epsilon_0 z^3} 2\hat{z} \text{ för } \theta = \phi = 0.$$

Och kraften på en dipol: $F = p \hat{z}$

$$F = (p \cdot \nabla) E = p \frac{\partial}{\partial z} E_{\text{dip}} \rightarrow \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-3}{z^4} 2\hat{z} \text{ för } \theta = \phi = 0$$

Vilket är identiskt med vårt resultat ovan om vi sätter avståndet $z = 2z_1$ och dipolen $p = q_1 \delta z$.